CHAPITRE IV. Systèmes linéaires forcés à un degré de liberté.

4.1 Force d'excitation

Pour vaincre les frottements responsables des pertes d'énergie et du ralentissement des systèmes en mouvement, il faut appliquer une force externe qu'on appelle **excitation**.

4.2 Équation de Lagrange des systèmes forcés

Si en plus du frottement $f = -\alpha\dot{q}$, il existe une force d'excitation externe $F(t)$, l'équation de Lagrange s'écrit:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{x}} + F(t)} \quad \text{(En translation)} \tag{4.1.a}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} + \mathcal{M}(t)} \quad \text{(En rotation. } \mathcal{M} \text{ est le moment de la force } F.) \tag{4.1.b}$$

4.3 Équation du mouvement des systèmes forcés

L'équation du mouvement des systèmes linéaires amortis par $f = -\alpha\dot{q}$ et excités par $F(t)$ est de la forme (a est une constante)

$$\boxed{\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = F(t)/a.} \tag{4.2}$$

4.4 Résolution de l'équation du mouvement

La résolution de l'équation (4.2) est très simple pour une excitation sinusoïdale $F(t) = F_0\cos\Omega t$. Dans ce cas (4.2) s'écrit: $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = (F_0/a)\cos\Omega t$. La solution générale de cette équation est:

$$q(t) = q_{\mathrm{T}}(t) + q_{\mathrm{P}}(t).$$

• $q_{\mathrm{T}}(t)$ est la solution (**transitoire**) de l'équation homogène (sans F). Elle dépend du signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$. Elle est dite transitoire car elle s'éteint au cours du temps (*Voir Chap. III.*)
• $q_{\mathrm{P}}(t)$ est la solution (**permanente**) de l'équation nonhomogène (avec F). Elle est appelée permanente car elle dure tout au long du mouvement. Elle est de la forme $q(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$.
On trouve $\boldsymbol{A}$ et ϕ à l'aide de la représentation complexe comme suit:

$$\boxed{\begin{array}{c} F_0\cos\Omega t \longrightarrow F_0 e^{j\Omega t}. \\ q(t) = A\cos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{q}(t) = Ae^{j(\Omega t+\phi)} = \underline{A}e^{j\Omega t}. \end{array}}$$

$$\begin{array}{rlcl} \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = (F_0/a)\cos\Omega t & \longrightarrow & \ddot{\underline{q}} + 2\lambda\dot{\underline{q}} + \omega_0^2\underline{q} & = (F_0/a)\,e^{j\Omega t} \\ & \Longrightarrow & -\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\underline{A}e^{j\Omega t} & = (F_0/a)\,e^{j\Omega t} \\ & \Longrightarrow & \left(-\Omega^2 + 2\lambda j\Omega + \omega_0^2\right)\underline{A} & = F_0/a \end{array}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{A} = \frac{F_0/a}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega}.} \tag{4.3}$$

L'amplitude du mouvement est donc:

$$\boxed{A = |\underline{A}| = \frac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.} \tag{4.4}$$

La phase ϕ du mouvement (déphasage entre $q(t)$ et $F(t)$) est donnée par:

$$\boxed{\tan\phi = \frac{\operatorname{Im}(\underline{A})}{\operatorname{Re}(\underline{A})} = -\frac{2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}.} \tag{4.5}$$

Finalement la solution du mouvement en **régime permanent** est

$$\boxed{q(t) = A\cos(\Omega t + \phi). \quad \text{(Avec } A \text{ donné par (4.4) et } \phi \text{ donnée par (4.5))}} \tag{4.6}$$

4.5 Résonance

La pulsation d'excitation Ω pour laquelle l'amplitude A atteint son maximum est appelée **pulsation de résonance** (d'*amplitude*) Ω_R. A est maximale lorsque $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$. D'après (4.4) :

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0 \Longrightarrow \frac{\left[-4\Omega\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + 8\lambda^2\Omega\right](F_0/a)}{2\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2\right]^{3/2}} = 0 \Longrightarrow -4\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + 8\lambda^2 = 0, \text{ soit}$$

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \equiv \Omega_R.} \Longleftrightarrow \boxed{\Omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.} \qquad (4.7)$$

À cette pulsation, l'amplitude est

$$\boxed{A_{\max} = \frac{F_0/a}{\sqrt{4\lambda^2\omega_0^2 - 4\lambda^4}}} \Longleftrightarrow \boxed{A_{\max} = \frac{F_0}{a\omega_0^2}\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.} \qquad (4.8)$$

Pour qu'il y ait résonance il faut que: $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \Longrightarrow 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Longrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$:
Le facteur de qualité doit donc être supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$ l'amortissement doit être faible.
D'après (4.5), $\tan\phi = -\infty$ ($\phi = -\frac{\pi}{2}$) lorsque

$$\boxed{\Omega = \omega_0.} \qquad (4.9)$$

Cette pulsation est appelée pulsation de **résonance de phase**.

4.6 Bande passante et facteur de qualité

La puissance instantanée fournie par la force d'excitation est: $\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{F.dq}{dt} = F.\dot{q}$.
En utilisant (4.6), on trouve: $\mathcal{P} = -F_0\cos\Omega t.\Omega A\sin(\Omega t + \phi) = -\frac{1}{2}\Omega A F_0\left[\sin\phi + \sin(2\Omega t + \phi)\right]$.
La puissance moyenne est $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{P}dt = -\frac{1}{2}\Omega A F_0 \sin\phi = -\frac{1}{2}\Omega A F_0 \frac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$. D'après (4.4)et(4.5):

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\Omega^2\lambda\left(F_0^2/a\right)}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}. \qquad (4.10)$$

$\langle\mathcal{P}\rangle$ est maximale lorsque $\frac{\partial\langle\mathcal{P}\rangle}{\partial\Omega} = 0 \Longrightarrow$

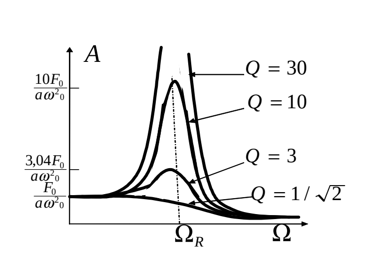
$$\boxed{\begin{array}{c}\Omega = \omega_0. \\ \langle\mathcal{P}\rangle_{\max} = \frac{F_0^2}{4\lambda a}.\end{array}} \qquad (4.11)$$

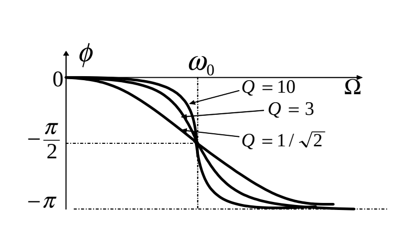
Les pulsations Ω_{c1} et Ω_{c2} pour lesquelles $\langle\mathcal{P}\rangle$ est à moitié de son maximum sont appelées **pulsations de coupure**. La largeur $\Omega_{c2} - \Omega_{c1} = B$ est appelée la **bande passante**. D'après (4.10), $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\langle\mathcal{P}\rangle_{\max}}{2}$ (à faible amortissement: $\lambda \ll \omega_0$) pour $\Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda$ et $\Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda$. Donc

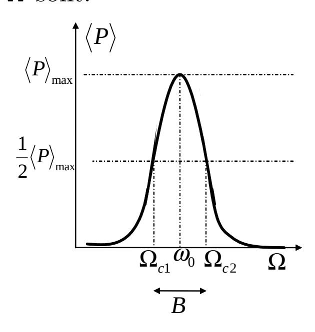
$$\boxed{B = 2\lambda.} \qquad (4.12)$$

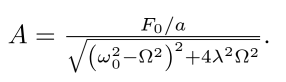
$\frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\lambda} = Q$ est le **facteur de qualité** (*Voir Chap. III*).

Les graphes de A, ϕ, et $\langle\mathcal{P}\rangle$ en fonction de la pulsation d'excitation Ω sont:









$A = \frac{F_0/a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$.

$\phi = \tan^{-1}\left[-\frac{2\lambda\Omega}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)}\right]$.

$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\Omega^2\lambda\left(F_0^2/a\right)}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}$

Analogie entre les systèmes mécaniques et électriques

Le formalisme développé en cours est valable pour toute coordonnée généralisé q. Dans le cas des systèmes mécaniques q peut être $x, y, z, \theta, ...$, alors que dans le cas des systèmes électriques q est la charge q qui circule dans le circuit. Nous avons alors les tableaux suivants des analogies mécanique-électrique.

Analogie entre grandeurs

Système Mécanique			**Système Electrique**		
Grandeur	**réelle**	**complexe**	**Grandeur**	**réelle**	**complexe**
Coordonnée	x	$\underline{x}$	Charge	q	$\underline{q}$
Vitesse	$v = \dot{x}$	$\underline{v}=\dot{\underline{x}}$	Courant	$i = \dot{q}$	$\underline{i}=\dot{\underline{q}}$
Force	F	$\underline{F}$	Tension	E	$\underline{E}$

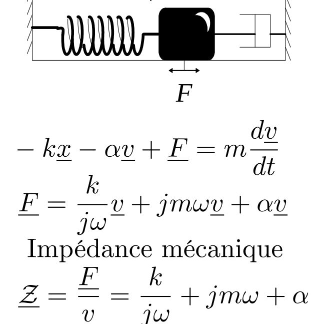
Analogie entre formules

Système Mécanique		**Système Electrique**	
Formule	**complexe**	**Formule**	**complexe**
Impédance mécanique	$\underline{Z}=\frac{\underline{F}}{\underline{v}}$	Impédance électrique	$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{i}}$
Force d'inertie	$m\frac{d\underline{v}}{dt} = jm\omega\underline{v}$	f.c.e.m d'inductance	$L\frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega\underline{i}$
Force de frottement	$\alpha\underline{v}$	Tension d'une résistance	$R\underline{i}$
Force d'un ressort	$k\underline{x} = k\int \underline{v}dt = \frac{k}{j\omega}\underline{v}$	Tension d'une capacité	$\frac{\underline{q}}{C} = \frac{1}{C}\int \underline{i}dt = \frac{1}{jC\omega}\underline{i}$

Analogie entre éléments et caractéristiques

Système Mécanique		**Système Electrique**	
Ressort	k	Capacité inverse	$\frac{1}{C}$
Inertie	m	Inductance	L
Frottement	α	Résistance	R
Pulsation de résonance	$\sqrt{k/m}$	Pulsation de résonance	$1/\sqrt{LC}$
Bande passante	$2\lambda = \alpha/m$	Bande passante	$2\lambda = R/L$
Energie d'un ressort	$\frac{1}{2}kx^2$	Energie d'un condensateur	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
Energie cinétique d'un corps	$\frac{1}{2}mv^2$	Energie d'une bobine	$\frac{1}{2}Li^2$
Puissance dissipée par frottement	αv^2	Puissance dissipée par effet Joule	Ri^2

Exemple

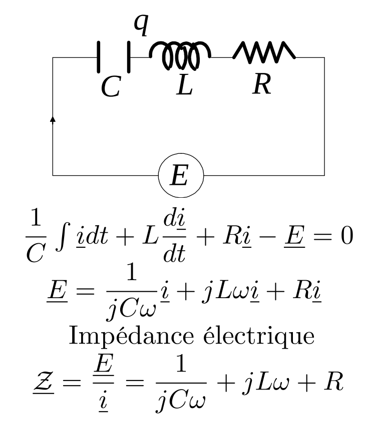


$$-k\underline{x} - \alpha\underline{v} + \underline{F} = m\frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$\underline{F} = \frac{k}{j\omega}\underline{v} + jm\omega\underline{v} + \alpha\underline{v}$$

Impédance mécanique

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}} = \frac{k}{j\omega} + jm\omega + \alpha$$



$$\frac{1}{C}\int \underline{i}dt + L\frac{d\underline{i}}{dt} + R\underline{i} - \underline{E} = 0$$

$$\underline{E} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i} + jL\omega\underline{i} + R\underline{i}$$

Impédance électrique

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{i}} = \frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R$$